

**Fachbereich Medieninformatik**

**Hochschule Harz**

# **Das Nyquist-Shannon Theorem**

**Referat**

**Philip Lücke**

**Matrikelnummer: 10070**

**Abgabe: 15.01.2007**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung.....</b>	<b>3</b>
<b>2 Das Phänomen des stillstehenden Rades.....</b>	<b>4</b>
<b>3 Das Abtasttheorem.....</b>	<b>5</b>
<b>4 Quellen</b>	
4.1 Literaturverzeichnis.....	11
4.2 Internetquellen.....	11
4.3 Abbildungsverzeichnis.....	11

## 1. Einleitung

Die Abtastung und Messung kontinuierlicher Funktionen steht im Mittelpunkt dieses Referats. Es existieren viele Arten von Signalverarbeitungssystemen, deren gemeinsame Grundlage das Prinzip in Abbildung 1 bildet.

Das kontinuierliche Signal  $f(t)$  wird abgetastet, um einen Satz von Zahlen  $[f_m]$  zu erzeugen, die anschließend von einem Rechner verarbeitet werden  $[f_m]$  und auf diese Weise einen Abtastsatz  $[g_m]$  am Ausgang erzeugen.

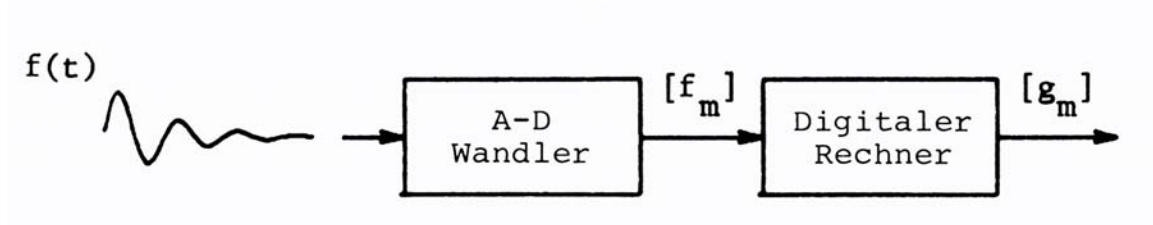


Abbildung 1: Digitale Signalverarbeitung, Quelle: R. Oldenburg Verlag

Das Signal deutet eine fortschreitende physikalische Größe an, die eine Spannung, ein Strom, eine Wegstrecke oder eine ähnliche Funktion der Zeit sein kann. Das Ziel jeder digitalen Signalverarbeitung ist die Rekonstruktion einer kontinuierlichen Funktion  $f(t)$  aus dem Abtastsatz  $[g_m]$ . Hier liegt das Gewicht zunächst auf einigen grundsätzlichen Eigenschaften des Abtatsatzes  $[f_m]$  und auf der Information, die  $[f_m]$  über das Originalsignal  $f(t)$  übermittelt werden.

## 2. Das Phänomen des stillstehenden Rades

Ein kurzes Beispiel aus dem Bereich des Films soll den Einstieg in Terminologie des Abtasttheorems erleichtern. Die Szene des Films zeigt eine Kutsche im Wilden Westen. Eine Postkutsche fährt auf einer staubigen Straße durch die Prärie. In den folgenden Minuten starten Räuber aus dem Hinterhalt einen Überfall auf die Kutsche. Der Kutscher gibt den Pferden die Sporen und hofft so, den Verbrechern zu entkommen. Der Film zeigt immer wieder die Räder und das Wegstäuben des Sandes, um den Eindruck von hoher Geschwindigkeit zu vermitteln. Mit zunehmender Beschleunigung beobachten die Zuschauer ein schnelleres Drehen der Wagenräder. Ab einem bestimmten Punkt jedoch, glauben die Betrachter, dass die Räder plötzlich langsamer drehen. Diese Beobachtung machen sie an den Bewegungen der Radspeichen fest. Die Räuber kommen der Postkutsche nun gefährlich nahe, so dass der Fahrer gezwungen ist, noch mehr Geschwindigkeit aufzunehmen. Nun scheinen die Wagenräder unerwartet stillzustehen. Würde der Postkutscher das Tempo um ein weiteres Mal erhöhen, so könnten die Zuschauer beobachten, dass sich die Räder scheinbar rückwärts drehen.

Abbildung 2 soll dieses Phänomen verdeutlichen und erklären, warum der Zuschauer scheinbar rückwärtslaufende Räder sieht.

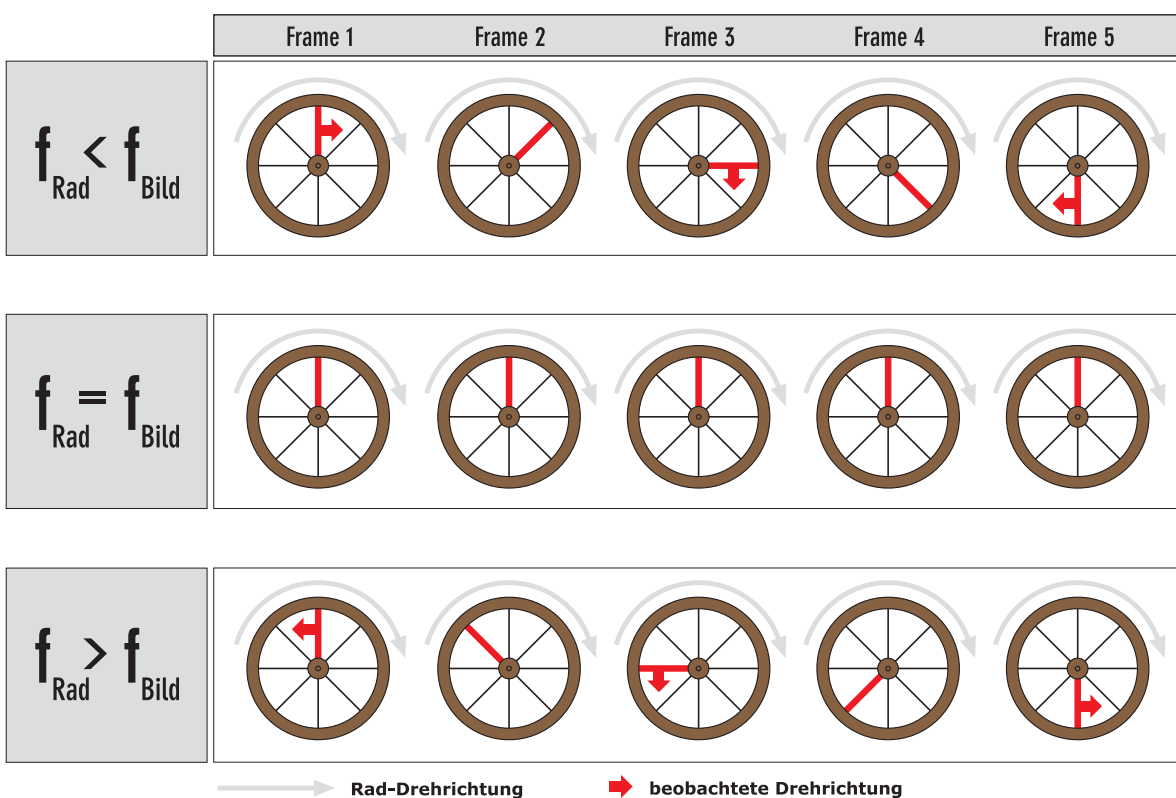


Abbildung 2: Das Wagenrad-Phänomen, Quelle: Eigene Darstellung

Die erste Reihe der waagrecht angeordneten Radbilder (Abb. 2.1) demonstriert eine höhere Bildfrequenz der Kamera in Bezug zur Umdrehungszahl des Rades pro Zeiteinheit. Die Bildfrequenz ist also höher als die Radfrequenz. Nur unter dieser Bedingung lässt sich scheinbar die natürliche Vorwärtsbewegung des Wagenrades beobachten. Diese Überlegung basiert sich auf dem Abtasttheorem von dem schwedischen Physiker Harry Nyquist und dem amerikanischen Mathematiker Claude Elwood Shannon. Das so genannten Nyquist/Shannon-Abtasttheorem besagt, in Bezug auf das Wagenrad, dass der Betrachter die echte Radgeschwindigkeit nur beobachten kann, wenn die Bildfrequenz mindestens doppelt hoch ist wie die Radfrequenz.

Die dicke rote Speiche in Abb. 2.1 markiert die einzelnen Momentaufnahmen der Kamera.

Das erste Frame zeigt die zuvor bestimmte Speiche bei 0°, Frame 2 um 45° nach rechts und in Frame 3 um 90° nach rechts gedreht usw. Um diese einmalige komplette Drehung in acht 45°-Schritten exakt in einem Film betrachten zu können, muss die Bildfrequenz der Kamera auch acht mal höher sein als die Radfrequenz. Die Richtung der langen und kurzen Pfeile deuten an, dass die echte (lange Pfeile) mit der beobachteten (kurz) Drehrichtung des Rades identisch ist.

Wird die Drehung des Rades beschleunigt, so erhöht sich auch die Radfrequenz. Überschreitet diese die Hälfte der Bildfrequenz führt das zur optischen Täuschung, die den Zuschauer glauben lässt, das Rad drehe sich langsamer. Diesen kritischen Punkt bezeichnet man als das Nyquist-Kriterium. Ab diesem Punkt wird das Nyquist/Shannon-Abtasttheorem verletzt. Eine genauere Auseinandersetzung mit diesen Zusammenhängen folgt im Abschnitt 3. Nähert sich nun die Radfrequenz der vollen Bildfrequenz reduziert sich die beobachtbare Veränderung der Speichenposition. Es kommt zum visuellen Stillstand, wenn Rad- und Bildfrequenz identisch sind (Abb. 2.2). Der Grund liegt darin, dass die markierte Speiche in allen Frames in derselben Winkelposition zu sehen ist. Das Phänomen des rückläufigen Rades tritt auf, wenn die Frequenz des Rades die Bildfrequenz übersteigt (Abb. 2.3). Aufgrund dessen wird die markierte Speiche nicht erst abgebildet, wenn sie wieder in derselben Position ist, sondern etwas früher. Diese frühere Abbildung setzt sich von Frame zu Frame fort und lässt den Zuschauer glauben, das Rad drehe sich rückwärts. Diese wichtigen Zusammenhänge des Nyquist/Shannon-Abtasttheorems gelten als grundlegender Lehrsatz in der Nachrichtentechnik, Signalverarbeitung und Informationstheorie.

### 3. Das Abtasttheorem

Die folgenden Überlegungen fußen auf der Annahme, dass die Funktion  $f(t)$  in Intervallen von  $T$  Sekunden abgetastet wird, wie in Abbildung 3 gezeigt. Sie beschreibt ein ziemlich großes Spektrum von Abtastfällen, und die wichtigste Frage, die sich in solchen Fällen ergibt, betrifft das Abtastintervall  $T$ .

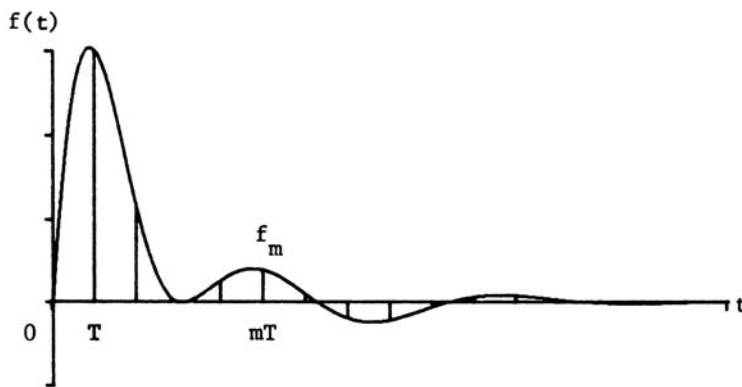


Abbildung 3: Abtastung von  $f(t)$  im Abtastintervall  $T$ , Quelle: R. Oldenburg Verlag

Wie klein muß  $T$  sein, um  $f(t)$  rekonstruieren zu können, wenn nur der Abtastplatz  $[f_m]$  gegeben ist? Sofern keine Einschränkungen für  $f(t)$  zwischen den Abtastpunkten zutreffen, ist die Antwort, dass  $T$  gleich 0 sein muss. Sind die Abtastpunkte  $T$  jedoch größer als 0 ist es immer möglich, verschiedene kontinuierliche Funktionen zu konstruieren (Abb. 4).

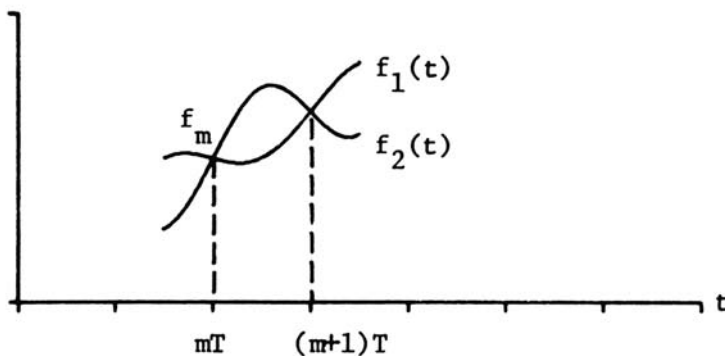


Abbildung 4: Funktion mit den selben Abtastwerten, Quelle: R. Oldenburg Verlag

Auf dieses Problem der Vieldeutigkeit wird später im Zusammenhang mit dem Alias-Effekt eingegangen. Es muss nun eine Einschränkung gefunden werden,  $f(t)$  vollständig mit nur einem endlichen Satz von Zahlen  $[f_m]$  zu beschreiben. Das Abtasttheorem, das diese Einschränkung dem Frequenzinhalt von  $f(t)$  auferlegt, kann wie folgt ausgedrückt werden:

Um fähig zu sein,  $f(t)$  exakt wiederzugewinnen, muss man  $f(t)$  mit einer Rate abtasten, die größer als das Doppelte seiner höchsten Frequenzkomponente ist.

In einer Formel ausgedrückt:

$$f_{\text{abtast}} > 2 \cdot f_{\text{maxSignal}}$$

$$\frac{1}{2} f_{\text{abtast}} > f_{\text{maxSignal}}$$

Abbildung 5 veranschaulicht eine Situation, bei der eine Sinuswelle mit einer Rate abgetastet wird ( $f_{\text{abtast}}$ ), die genau gleich dem doppelten ihrer höchsten Frequenz  $f_{\text{max}}$  ist, und doch kann  $f(t)$  offensichtlich aus dem Abtastsatz nicht ausfindig gemacht werden, da alle Abtastwerte gleich 0 sind! Analog zur Radfrequenz und Bildfrequenz im obigen Beispiel – die Räder scheinen still zustehen.

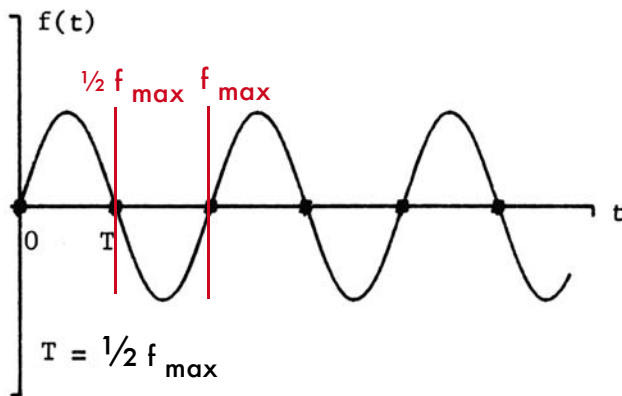


Abbildung 5: Abtastrate = zweimal die höchste in  $f(t)$  erhaltene Frequenz ( $f_{\text{max}}$ ), Quelle: R. Oldenburg Verlag

Folgt man nun dem Grundsatz des Theorems und wählt für die Abtastung eine Rate, die größer als das Doppelte der höchsten Frequenz des Eingangssignals ist, kann eine exakte Rekonstruktion dieses Signals stattfinden. Diese Aussage wird durch das erwähnte Beispiel der Wagenräder im Film bestätigt.

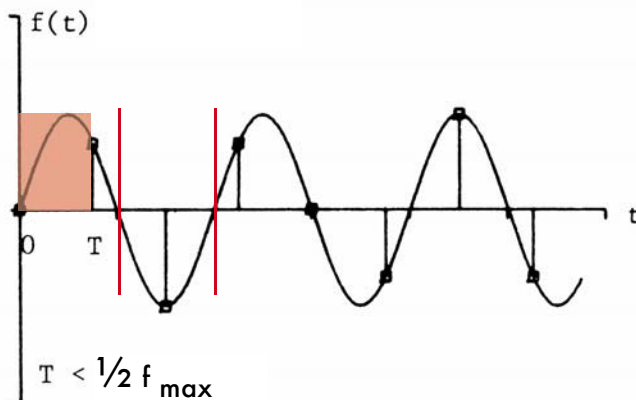


Abbildung 6: Abtastrate  $>$  zweimal die höchste in  $f(t)$  erhaltene Frequenz ( $f_{\text{max}}$ ), Quelle: R. Oldenburg Verlag

Keine andere Funktion von  $t$ , wenn sie auf Frequenzen kleiner als  $\frac{1}{2} f_{\max}$  begrenzt ist, hat diesen selben Abtastatz. Dieser Bereich ist in Abb. 7 rot markiert.

Andererseits veranschaulicht Abbildung 8 die zuvor benannte Vieldeutigkeit, wenn die Abtastrate kleiner als das Doppelte der höchsten Frequenz ist. Die Abtastwerte von  $f(t)$  sind dieselben wie die von  $g(t)$ , welches eine andere Sinuswelle mit einer kleineren Frequenz als  $f_{\max}$  darstellt. Mit dem dargestellten Abtastatz sind sowohl  $f(t)$  als  $g(t)$  mögliche Konstruktionen.

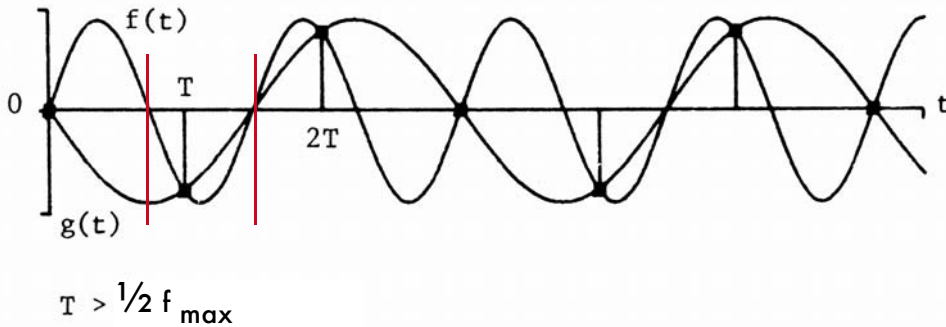


Abbildung 7: Abtastrate < zweimal die höchste in  $f(t)$  erhaltene Frequenz ( $f_{\max}$ ),  
Quelle: R. Oldenburg Verlag

Diese Art der Vieldeutigkeit tritt also ein, wenn die Bedingungen des Abtasttheorems verletzt werden. Durch diesen Vorgang nimmt der Betrachter im Beispiel der Wagenräder ein rückläufiges Rad wahr. Im Bereich der Signalverarbeitung nennt man dieses Phänomen den Alias-Effekt (Störsignale und Pseudosignale). Zur exakten Rekonstruktion des Ursprungssignals dürfen im abzutastenden Signal nur Frequenzanteile vorkommen, die kleiner als die Hälfte der höchsten Frequenz des Eingangssignals entsprechen. Anders ausgedrückt, die Abtastfrequenz muss größer sein als das Doppelte der höchsten Frequenz im Eingangssignal (siehe Abb. 7). Die zuvor angesprochene Verletzung dieses Grundsatzes führt dazu, dass zu hohe Frequenzen des Originalsignals als niedrigere Frequenzen interpretiert werden. Durch einen Tiefpass-Filter werden diese hohen Frequenzen aus dem Signal entfernt oder man erhöht die Abtastrate soweit, so dass sie wieder größer ist als das Doppelte dieser hohen Frequenzen.

Die folgenden Abbildungen sollen abschließend einen Überblick über die aufgezeigten verschiedenen Bedingungen des Nyquist/Shannon-Abtasttheorems geben.

In diesem Beispiel wird ein Eingangssignal mit einer feststehenden Abtastrate von 8000 Abtastungen pro Sekunde (8000 Hz) ausgelesen.

In Abbildung 9 besitzt das Eingangssignal eine Frequenz von 7000 Hz.

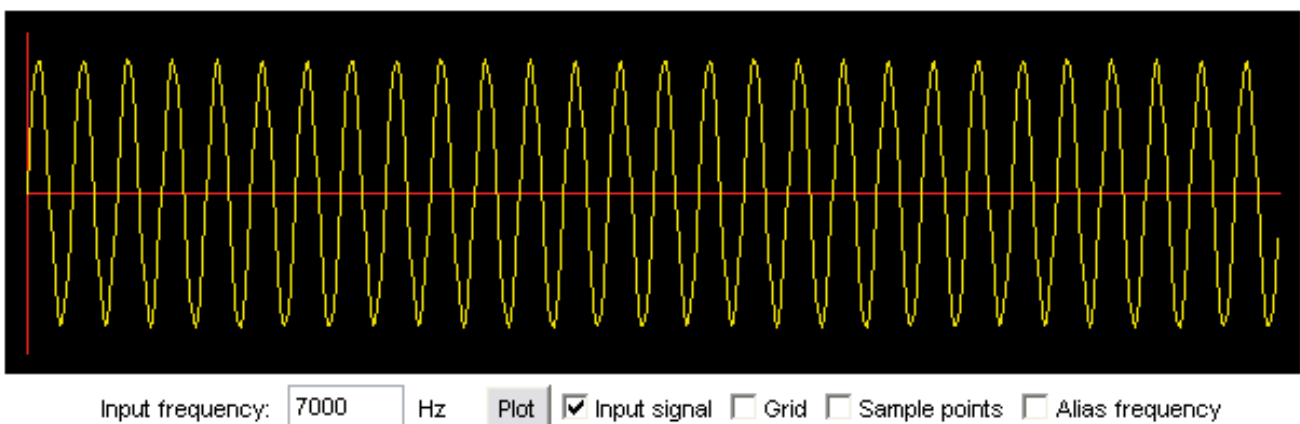


Abbildung 8: Die Eingabefrequenz von 7000 Hz, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Die grünen Linien in Abbildung 10 zeigen die Abtastintervalle, in denen das Signal abgetastet wird.

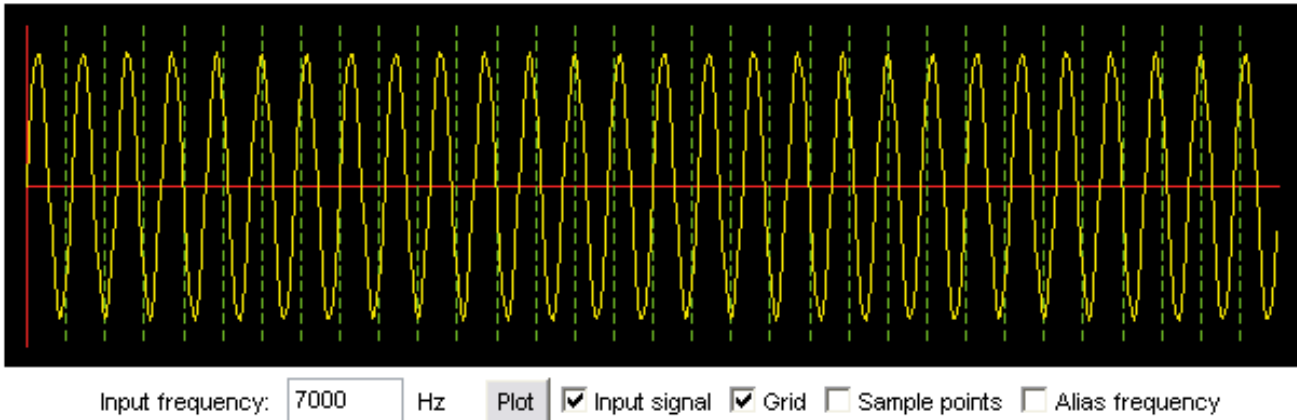


Abbildung 9: Darstellung der Abtastintervalle in Form von vertikalen grünen Linien, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Wird das Signal nun mit einer Frequenz von 8000Hz abgetastet, entstehen folgende Abtastpunkte (Abb. 11).

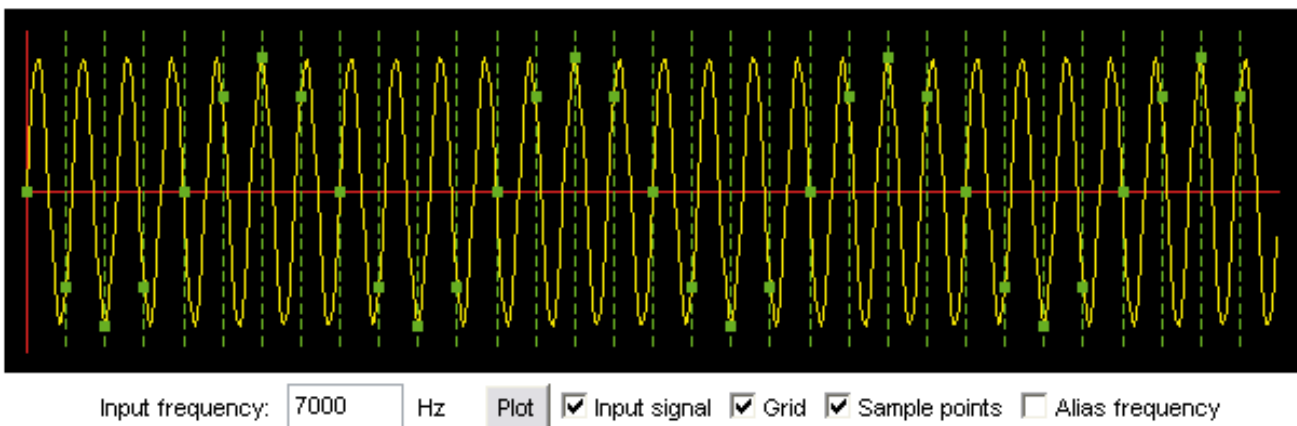


Abbildung 10: Positionen der Abtastpunkte in Form von hellgrünen Punkten, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Zum besseren visuellen Verständnis wird das Eingangssignal entfernt (Abb. 12).

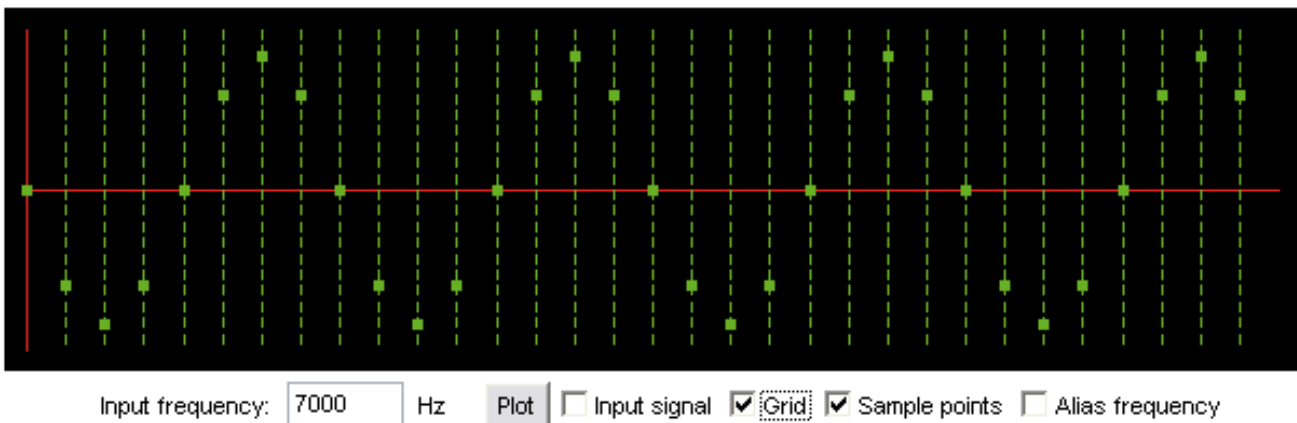


Abbildung 11: Positionen der Abtastpunkte ohne Eingangssignal, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>



Aufgrund der zu hohen maximalen Frequenz des Eingangssignals entsteht in der Rekonstruktion eine niedrigere Frequenz, die auf den Alias-Effekt zurückzuführen ist (Abb. 13).

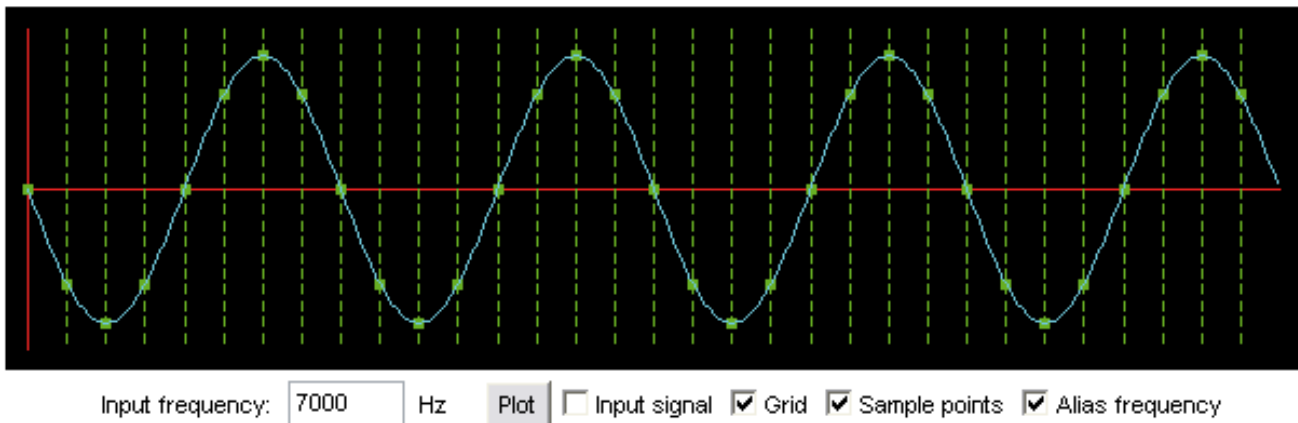


Abbildung 12: Das Ausgangssignal als niedrigere Frequenz, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Das Resultat ist ein Alias-Signal mit 1000Hz, dass sich aus Gleichung  $f_{\text{alias}} = f_{\text{abstast}} - f_{\text{max}}$  errechnet.

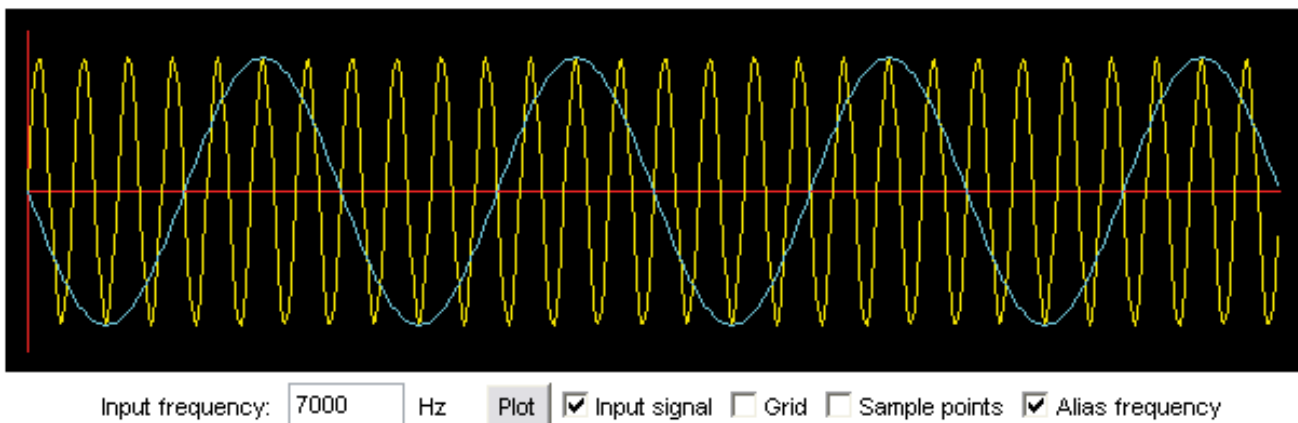


Abbildung 13: Das Eingangssignal (gelb) und das Alias-Signal (blau), Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Das zweite Beispiel soll den Fall bei einer Eingabefrequenz von 4000Hz beschreiben. Die Abtastrate von 8000Hz bleibt wie auch schon im vorherigen Beispiel fest bestehen. Da nun aber die doppelte Eingabefrequenz ( $2 \cdot 4000\text{Hz}$ ) exakt gleich der Abtastfrequenz ist, werden die ausgelesenen Werte immer 0 betragen. Somit ist eine Rekonstruktion des Signals nicht möglich.

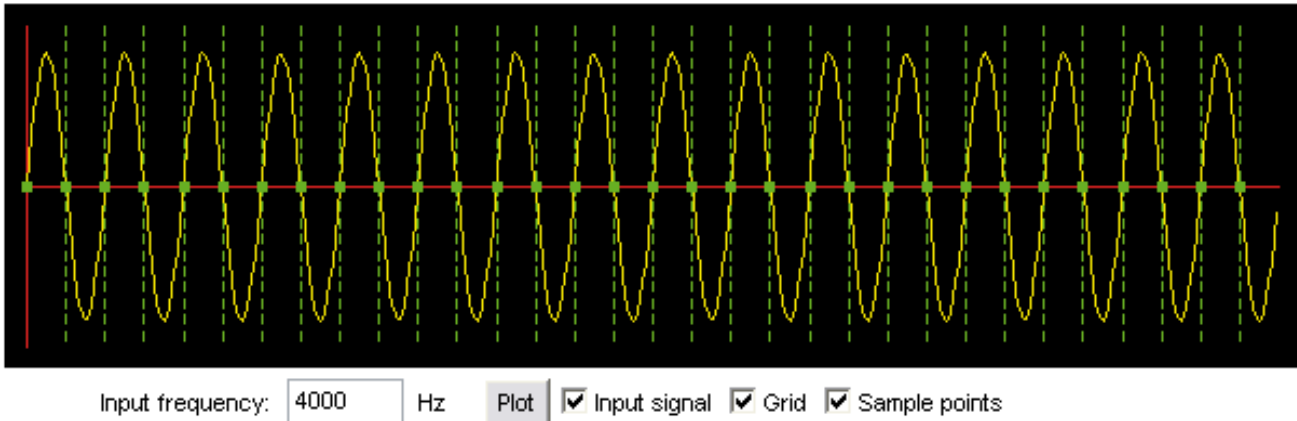


Abbildung 14: Das Eingangssignal =  $\frac{1}{2}$  Abtastfrequenz, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Abbildung 15 soll diesen Sachverhalt illustrieren.

Der dritte Fall soll den eigentlichen Lehrsatz des Nyquist/Shannon-Theorems beleuchten. Das Eingangssignal von 3000 Hz überschreitet in der doppelten Frequenz ( $2 * 3000\text{Hz} = 6000\text{Hz}$ ) nicht die Frequenz der Abtastrate (Abb. 16).

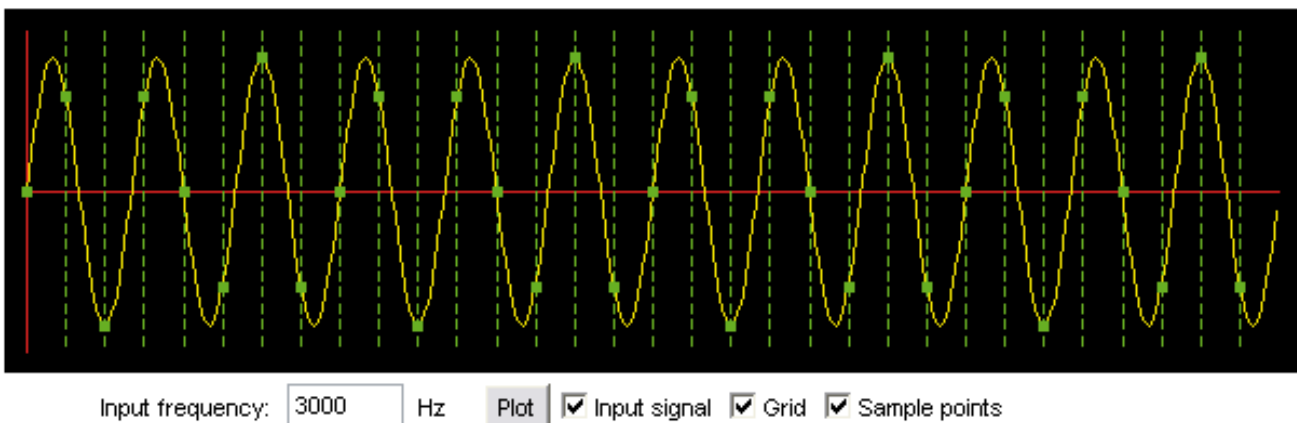


Abbildung 15: Das Eingangssignal  $< \frac{1}{2}$  Abtastfrequenz, Quelle: <http://www.dsptutor.freeuk.com>

Durch diesen Umstand entstehen keine Alias-Effekte und das Eingangssignal kann exakt rekonstruiert werden. Das Resultat ist ein Differenzsignal von 5000Hz, basierend auf der Rechnung Abtastfrequenz – Eingangssignal. Zum Vergleich, bei einer Audio-CD werden Frequenzen bis 20 kHz übertragen, die Abtastfrequenz beträgt 44.1 kHz. Aber auch im Bereich der Bilderfassung gilt der gleiche Grundsatz des Abtasttheorems. Um Moiré-Muster zu vermeiden, sollten Bildvorlagen immer mit mehr als der doppelten Auflösung eingelesen werden.

## 4. Quellenverzeichnis

### 4.1. Literaturverzeichnis

Stearns, S. D. (1991). Digitale Verarbeitung analoger Signale: R. Oldenburg Verlag München Wien 1991

### 4.2. Internetquellenverzeichnis

Schaerer, Thomas (2006). Das SC-Filter, eine kurze Einführung mit praktischer Anwendung  
[www-dokument] URL <http://www.elektronik-kompodium.de/public/schaerer/scf1.htm>

Wikipedia (2006). Nyquist-Shannon-Abtasttheorem  
[www-dokument] URL <http://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem#.C3.9Cberabtastung>

Wikipedia (2006). Alias-Effekt  
[www-dokument] URL <http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt>

[www-dokument] URL <http://www.dsptutor.freeuk.com/aliasing/AliasingDemo.html>

### 4.3. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 01: Digitale Signalverarbeitung.....	3
Abbildung 02: Das Wagenrad-Phänomen .....	4
Abbildung 03: Abtastung von $f(t)$ im Abtastintervall $T$ .....	5
Abbildung 04: Funktion mit den selben Abtastwerten.....	5
Abbildung 05: Abtastrate = zweimal die höchste in $f(t)$ erhaltene Frequenz ( $f_{\max}$ ).....	6
Abbildung 06: Abtastrate > zweimal die höchste in $f(t)$ erhaltene Frequenz ( $f_{\max}$ ).....	6
Abbildung 07: Abtastrate < zweimal die höchste in $f(t)$ erhaltene Frequenz ( $f_{\max}$ ).....	7
Abbildung 08: Die Eingabefrequenz von 7000 Hz.....	7
Abbildung 09: Darstellung der Abtastintervalle in Form von vertikalen grünen Linien.....	8
Abbildung 10: Positionen der Abtastpunkte in Form von hellgrünen Punkten.....	8
Abbildung 11: Positionen der Abtastpunkte ohne Eingabesignal.....	8
Abbildung 12: Das Ausgangssignal als niedrigere Frequenz.....	9
Abbildung 13: Das Eingangssignal (gelb) und das Alias-Signal (blau).....	9
Abbildung 14: Das Eingabesignal = $\frac{1}{2}$ Abtastfrequenz.....	10
Abbildung 15: Das Eingabesignal < $\frac{1}{2}$ Abtastfrequenz.....	10